

Der absolute Betrag

Zwei rationale Zahlen, die sich nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden, heißen Gegenzahlen.

Bemerkung:

Jede positive rationale Zahl hat also den gleichen Abstand vom Nullpunkt wie ihre negative Gegenzahl. Die Maßzahl dieser Entfernung nennt man den absoluten Betrag dieser Zahlen.

Für den Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften des Betrags:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Aufgaben:

1.0 Schreiben Sie betragsfrei und berechnen Sie.

1.1 $|-5| + 3$ ○ 1.2 $|-9| - 9$ ○ 1.3 $|4| + |-4|$ ○

1.4 $(-3) \cdot |-11|$ ⊗ 1.5 $3 \cdot |-7| - 20$ ⊗ 1.6 $4 \cdot |-3| + (-2) \cdot |-4|$ ⊗

2.0 Vereinfachen Sie.

2.1 $|-3x|$ ⊗ 2.2 $|17x|$ ⊗ 2.3 $|-12x|$ ⊗ 2.4 $|-x|$ ⊗

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1 $5+3=8$

1.2 $9-9=0$

1.3 $4+4=8$

1.4 $-3 \cdot 11 = -33$

1.5 $3 \cdot 7 - 20 = 1$

1.6 $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 4$

2.1 $|-3| \cdot |x| = 3 \cdot |x|$

2.2 $|17| \cdot |x| = 17 \cdot |x|$

2.3 $|-12| \cdot |x| = 12 \cdot |x|$

2.4 $|-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$

Terme mit Beträgen

Beispiel:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{wenn } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{wenn } x-5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-5 & \text{wenn } x \geq 5 \\ -x+5 & \text{wenn } x < 5 \end{cases}$$

Nimmt der Term zwischen den Betragsstrichen

- positive Werte oder null an, so darf man die Betragsstriche weglassen
- negative Werte an, so muss man beim Weglassen der Betragsstriche gleichzeitig ein Minuszeichen vor den Term setzen.

Aufgaben:

1.0 Schreiben Sie die Terme betragsfrei. 

1.1 $|3x+6|$

1.2 $|x-6|$

1.3 $|x+7|$

1.4 $|3-x|$

2.0 Schreiben Sie die Terme ohne Betragsstriche. 

2.1 $|2x-4|$

2.2 $|4+2x|$

2.3 $|1-3x|$

2.4 $|3-3x|$

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1.1 \quad |3x+6| = \begin{cases} 3x+6 & \text{wenn } 3x+6 \geq 0 \\ -(3x+6) & \text{wenn } 3x+6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+6 & \text{wenn } x \geq -2 \\ -3x-6 & \text{wenn } x < -2 \end{cases}$$

$$1.2 \quad |x-6| = \begin{cases} x-6 & \text{wenn } x-6 \geq 0 \\ -(x-6) & \text{wenn } x-6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-6 & \text{wenn } x \geq 6 \\ -x+6 & \text{wenn } x < 6 \end{cases}$$

$$1.3 \quad |x+7| = \begin{cases} x+7 & \text{wenn } x+7 \geq 0 \\ -(x+7) & \text{wenn } x+7 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+7 & \text{wenn } x \geq -7 \\ -x-7 & \text{wenn } x < -7 \end{cases}$$

$$1.4 \quad |3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{wenn } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{wenn } 3-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & \text{wenn } x \leq 3 \\ -3+x & \text{wenn } x > 3 \end{cases}$$

$$2.1 \quad |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{wenn } 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4) & \text{wenn } 2x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{wenn } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{wenn } x < 2 \end{cases}$$

$$2.2 \quad |4+2x| = \begin{cases} 4+2x & \text{wenn } 4+2x \geq 0 \\ -(4+2x) & \text{wenn } 4+2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4+2x & \text{wenn } x \geq -2 \\ -4-2x & \text{wenn } x < -2 \end{cases}$$

$$2.3 \quad |1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{wenn } 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x) & \text{wenn } 1-3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-3x & \text{wenn } x \leq \frac{1}{3} \\ -1+3x & \text{wenn } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2.4 \quad |3-3x| = \begin{cases} 3-3x & \text{wenn } 3-3x \geq 0 \\ -(3-3x) & \text{wenn } 3-3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-3x & \text{wenn } x \leq 1 \\ -3+3x & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$